ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Gesetz der grossen Zahlen

(basierend auf Slides von Lukas Meier)

Empirische Illustration des Gesetzes der grossen Zahlen

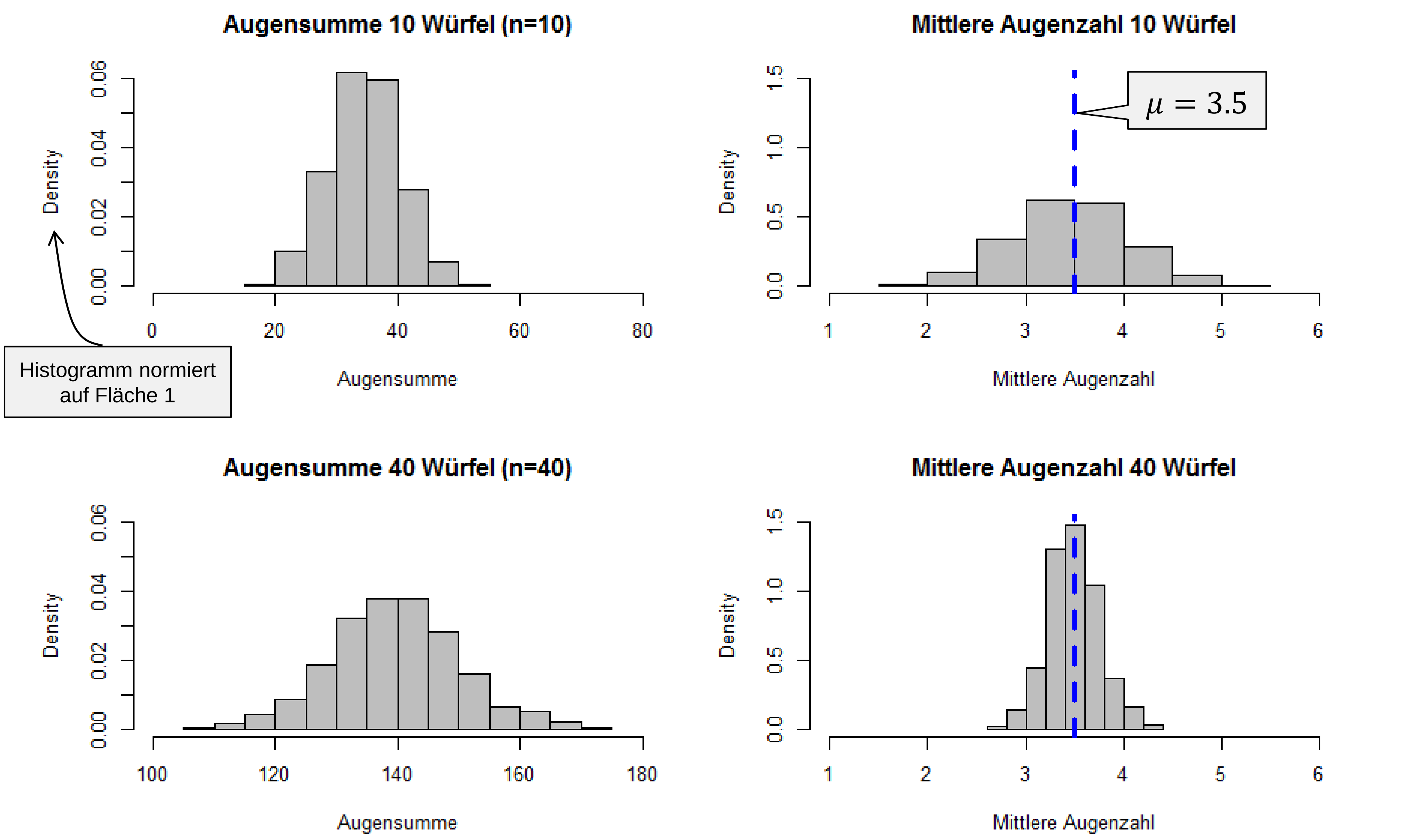
Betrachte zwei Situationen

- Werfe **10 Würfel**

- Werfe **40 Würfel**

- X_i sei die Augenzahl des i-ten Würfels, $\mu = E[X_i] = 3.5$.
- In einem Durchgang würfeln wir einmal mit allen 10 und einmal mit allen 40 Würfeln. Wir notieren jeweils die **Augensumme** (S_n) und die **mittlere Augenzahl** $(\overline{X}_n)$, $n \in \{10, 40\}$.

Simulationsresultate (je 1’000 Durchgänge)

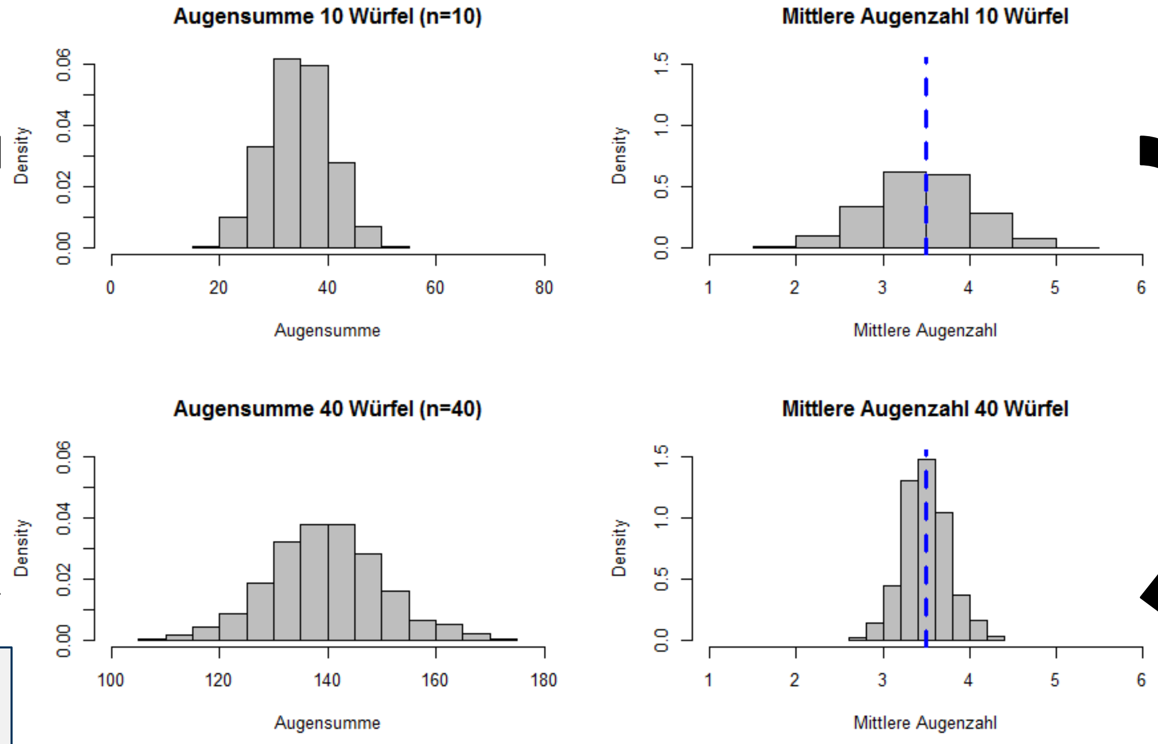


Simulationsresultate (je 1’000 Durchgänge)

Die Anzahl Summanden wird **4 Mal** so gross.

$\sigma_{S_{10}}$

$\sigma_{\overline{X}_{10}}$



$\sigma_{S_{40}} = 2 \cdot \sigma_{S_{10}}$

$\sigma_{\overline{X}_{40}} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{\overline{X}_{10}}$

Standardabweichung der Summe verdoppelt sich.

Standardabweichung des arithm. Mittels halbiert sich.

Bemerkungen

- Je grösser n, desto grösser wird die Streuung der **Augensumme**.
- Für die **durchschnittliche** Augenzahl wird die Streuung aber kleiner und man ist immer **näher am Erwartungswert** (in diesem Fall 3.5).
- Also, wie intuitiv zu erwarten ist: **Wenn wir über viele Beobachtungen mitteln, werden wir immer genauer.**
- D.h. für n sehr gross ist das arithm. Mittel $\overline{X}_n$ sehr nahe am Erwartungswert. Dies ist gerade die Aussage des Gesetzes der grossen Zahlen (GGZ).